

Construcción de funciones de Lyapunov para la estabilización de sistemas mecánicos subactuados



DOI: <https://doi.org/10.23857/dc.v9i1>

Ciencias Técnicas y Aplicadas
Artículo de Investigación

Construcción de funciones de Lyapunov para la estabilización de sistemas mecánicos subactuados

Construction of Lyapunov functions for the stabilization of underactuated mechanical systems

Construção de funções de Lyapunov para a estabilização de sistemas mecânicos subatuados

Wagner José Varela Ramírez^I

wvarela3520@utm.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0003-3459-9798>

Maribel Cecilia Pérez Pirela^{II}

<https://orcid.org/0000-0002-9687-5471>

maribel.perez@utm.edu.ec

Atilio Morillo Piña^{III}

<https://orcid.org/0009-0006-0538-2353>

morilloatilio@gmail.com

Correspondencia: wvarela3520@utm.edu.ec

***Recibido:** 27 de febrero de 2022 ***Aceptado:** 30 de marzo de 2023 * **Publicado:** 01 de abril de 2023

- I. Docente investigador, Maestrante en Matemática Universidad Técnica de Manabí, Docente Unidad Educativa Monserrate Álava de González, Ingeniero comercial, mención en Administración de Empresas Públicas, Ecuador.
 - II. Docente investigador, PhD en Ciencias de Ingeniería Química Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Técnica de Manabí, Ecuador.
 - III. Docente investigador, PhD en Matemáticas Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas (CIMA), Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia, Venezuela.
-

Resumen

Utilizar las funciones de Lyapunov para estudiar la estabilidad de sistemas dinámicos involucra resolver una ecuación en derivadas parciales (EDP) que, en muchos casos resulta compleja y desafiante. Es por ello que se plantea una investigación complementaria, a un trabajo de investigación en curso, desde la Maestría en Matemática de la Universidad Técnica de Manabí – Ecuador. El estudio que se presenta tuvo como objetivo general: Resolver el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, cuyas soluciones proveen funciones de Lyapunov que representan las funciones de energía asignables a sistemas mecánicos subactuados de grado 1. Para ello fue necesario plantearse dos casos, el Sistema TORA y el Sistema ACROBOT. La metodología se fundamentó en un tipo de investigación documental, de nivel aplicada, utilizando Software OCTAVE donde fue necesario generar dos códigos archivos de corrida para cada caso de estudio; VDESTORA Y SIMVDESTORA para el Sistema TORA y VDESACRO y SIMVDESACRO para el Sistema ACROBOT, para corroborar el comportamiento deseado de las funciones de Lyapunov. Como resultado se obtuvo una síntesis de la energía potencial, mediante la reducción del conjunto de parámetros posibles para la matriz deseada, que facilitó la resolución de la ecuación en derivadas parciales, que forma parte de las características de métodos de control basados en energía.

Palabras clave: Funciones de Lyapunov; Sistemas Mecánicos Subactuados; Control Basado en Energía; Simulaciones.

Abstract

Using the Lyapunov functions to study the stability of dynamical systems involves solving a partial differential equation (PDE) that, in many cases, is complex and challenging. That is why a complementary investigation is proposed, to a research work in progress, from the Master's Degree in Mathematics of the Technical University of Manabí - Ecuador. The study presented had the general objective: Solve the set of equations in partial derivatives, whose solutions provide Lyapunov functions that represent the energy functions assignable to underactuated mechanical systems of degree 1. For this, it was necessary to consider two cases, the System TORA and the ACROBOT System. The methodology was based on a type of documentary research, applied level, using OCTAVE Software where it was necessary to generate two run code files for each case study;

VDESTORA AND SIMVDESTORA for the TORA System and VDESACRO and SIMVDESACRO for the ACROBOT System, to verify the desired behavior of the Lyapunov functions. As a result, a synthesis of potential energy was obtained, by reducing the set of possible parameters for the desired matrix, which facilitated the resolution of the equation in partial derivatives, which is part of the characteristics of energy-based control methods.

Keywords: Lyapunov functions; Underactuated Mechanical Systems; Energy Based Control; simulations

Resumo

Usar as funções de Lyapunov para estudar a estabilidade de sistemas dinâmicos envolve a resolução de uma equação diferencial parcial (PDE) que, em muitos casos, é complexa e desafiadora. É por isso que se propõe uma investigação complementar, a um trabalho de pesquisa em andamento, do Mestrado em Matemática da Universidade Técnica de Manabí - Equador. O estudo apresentado teve como objetivo geral: Resolver o conjunto de equações em derivadas parciais, cujas soluções fornecem funções de Lyapunov que representam as funções de energia atribuíveis a sistemas mecânicos subatuados de grau 1. Para isso, foi necessário considerar dois casos, o Sistema TORA e o Sistema ACROBOT. A metodologia baseou-se num tipo de pesquisa documental, nível aplicado, utilizando o Software OCTAVE onde foi necessário gerar dois ficheiros run code para cada estudo de caso; VDESTORA E SIMVDESTORA para o Sistema TORA e VDESACRO e SIMVDESACRO para o Sistema ACROBOT, para verificar o comportamento desejado das funções Lyapunov. Como resultado, obteve-se uma síntese de energia potencial, reduzindo o conjunto de parâmetros possíveis para a matriz desejada, o que facilitou a resolução da equação em derivadas parciais, o que faz parte das características dos métodos de controle baseados em energia.

Palavras-chave: funções de Lyapunov; Sistemas Mecânicos Subatuados; Controle Baseado em Energia; simulações

Introducción

El Método Directo de Lyapunov (MDL) es uno de los procedimientos que existen para estudiar la estabilidad de sistemas no lineales, quizá uno de los más usados (Scola et al., 2022). Fue concebido por Aleksandr Lyapunov (1892) ingeniero y matemático ruso, no solo permite determinar si el origen

del sistema es estable, sino que, a través de las funciones de Lyapunov, es posible estudiar otras propiedades dinámicas como regiones de atracción, procesos transitorios, estabilidad en tiempo finito y la estimación del tiempo de convergencia al origen (Newcastle, 2022).

El teorema en el que se sustenta el MDL establece que la existencia de una función escalar V positiva definida, tal que su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema sea negativa definida, implica que el origen del sistema es un punto de equilibrio asintóticamente estable. El método permite concluir estabilidad del origen una vez obtenida la función V , conocida como función de Lyapunov. Sin embargo, no aborda en absoluto cómo obtener V y para hacerlo es necesario resolver una Ecuación Diferencial Parcial (EDP), que surge de las condiciones impuestas a la función de Lyapunov.

El método de control basado en energía, esencialmente consiste en partir de una estructura Hamiltoniana controlada por puertos en bucle abierto y obtener otra en bucle cerrado con las propiedades de estabilidad deseadas, igualando las ecuaciones de bucle abierto y del sistema deseado se obtiene la ley de control (López, 2014). La filosofía del mismo no es más que la búsqueda de una función de energía y una estructura Hamiltoniana para el sistema en bucle cerrado, siendo dicha función de energía la de Lyapunov.

Es importante considerar que, a pesar de que existe un gran número de métodos que permiten obtener las funciones de Lyapunov, no existe un método sistemático universal. Por tanto, se puede decir que el problema de obtención de estas funciones permanece abierto para muchas clases de sistemas no lineales, en particular para los algoritmos de control basados en energía y para sistemas mecánicos subactuados.

Es por ello que, para comprender la efectividad del método propuesto en el estudio que se presenta, como antesala y complemento de una investigación de maestría en curso que será presentada ante la Universidad Técnica de

Manabí. Se estudian a partir de la formulación del modelo matemático, dos sistemas mecánicos subactuados de grado 1 como lo es el Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (*Translational Oscillator with Rotational Actuator*), por sus siglas en inglés (TORA) y el Sistema ACROBOT, llamado así por su forma de acróbata. Ambos sistemas poseen una matriz de inercia en función solamente de la coordenada actuada.

Sistema TORA

El denominado Sistema TORA consiste de una plataforma oscilante traslacionalmente de masa m_1 , es controlado por una masa rotacional excéntrica de masa m_2 . El problema es de interés como un caso de estudio en el diseño de controles no lineales debido a que el modelo exhibe una interacción no lineal entre sus movimientos traslacional y rotacional. En el sistema q_2 es el ángulo de rotación de la masa m_2 , r es su radio de excentricidad, e I es el momento de inercia. Y q_1 es la posición del carro (Pérez y Morillo, 2016).

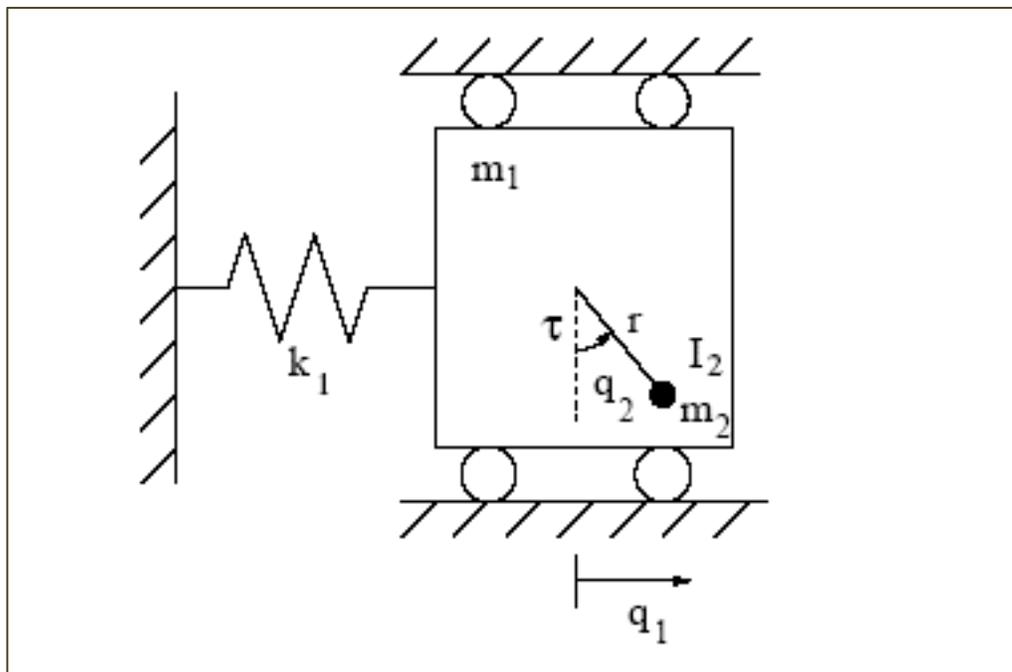


Figura 1. Sistema TORA

Fuente: Adaptación de los autores (2023) a partir de (Pérez y Morillo, 2016)

Modelado del Sistema TORA

En el sistema TORA existen dos subsistemas bien definidos: 1) el carro y 2) el péndulo. La energía total del sistema = Energía Cinética (K) + Energía Potencial (V), es decir, $E = K + V$. A su vez, $K = K_1 + K_2$ y $V = V_1 + V_2$. Para la energía cinética se considera la existencia de movimientos traslacional y rotacional. Para la energía potencial se considera la existencia de energía potencial gravitatoria y elástica.

Para calcular la energía cinética del péndulo se utiliza el Teorema de Koenig, “que permite expresar el momento angular d un sistema de partículas en términos del momento angular del centro de masas del sistema y la suma de momentos angulares de cada una de las partículas con respecto al centro de masas” (Fernández, 2021, p. 82).

Así la energía cinética total del sistema TORA es:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + rm_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2) + \frac{1}{2}(I + m_2r^2)\dot{q}_2^2$$

Y la energía potencial total del sistema TORA es:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}kq_1^2 + m_2gr[1 - \cos(q_2)]$$

Se determina el Langrangiano del sistema TORA:

$$L = K(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + rm_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2) + \frac{1}{2}(I + m_2r^2)\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}kq_1^2 - m_2gr[1 - \cos(q_2)]$$

Estas ecuaciones, en el caso de sólidos rígidos y en ausencia de fricción pueden escribirse:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B(q, \dot{q})\tau$$

Del cual resulta:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & rm_2 \cos(q_2) \\ rm_2 \cos(q_2) & m_2r^2 + I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -rm_2 \sin(q_2)\dot{q}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kq_1 \\ -m_2rg \sin(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau$$

Donde la matriz de inercia $M(q)$ es:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & rm_2 \cos(q_2) \\ rm_2 \cos(q_2) & m_2r^2 + I \end{bmatrix} \rightarrow M(q) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \cos(q_2) \\ c_2 \cos(q_2) & c_3 \end{bmatrix}$$

y $c_1 = m_1 + m_2$, $c_2 = rm_2$, $c_3 = m_2r^2 + I$. $M(q)$ es simétrica y definida positiva, por lo tanto: $d_{11} > 0 \rightarrow m_1 + m_2 > 0 \rightarrow c_1 > 0$ y $\det M(q) > 0 \rightarrow c_1c_3 - c_2^2 \cos^2(q_2) > 0 \rightarrow c_1c_3 - c_2^2 > 0$

Sistema ACROBOT

El denominado Sistema ACROBOT, consiste en dos brazos mecánicos giratorios con masas m_1 y m_2 respectivamente. El problema es de interés como un caso de estudio en el diseño de controles no

lineales debido a que dicho modelo exhibe una interacción no lineal entre sus movimientos rotacionales.

En el sistema para el brazo 1, q_1 es el ángulo de rotación, l_1 es la longitud del brazo, lc_1 es la distancia al centro de masa, I_1 es el momento de inercia en el centro de masa y C_1 es el centro de masa. Para el brazo 2, en el sistema la coordenada actuada es q_2 , que representa el ángulo de rotación, l_2 es la longitud del brazo, lc_2 es la distancia al centro de masa, I_2 es el momento de inercia en el centro de masa y C_2 es el centro de masa.

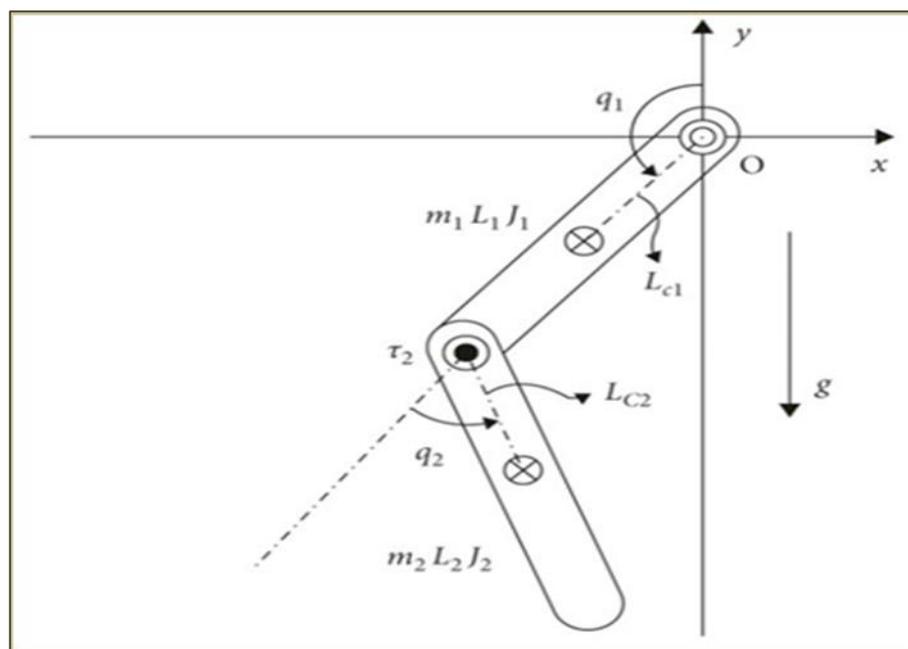


Figura 2. Sistema ACROBOT

Fuente: Adaptación de los autores (2023) a partir de (Tedrake, 2022)

Modelado del Sistema ACROBOT

En dicho sistema existen dos subsistemas bien definidos: a) brazo 1 y b) brazo 2. La energía total del sistema = Energía Cinética (K) + Energía Potencial (V), es decir, $E = K + V$. A su vez, $K = K_1 + K_2$ y $V = V_1 + V_2$. Para la energía cinética se considera sólo la existencia de movimiento rotacional. Para la energía potencial se considera la existencia de energía potencial gravitatoria. Para calcular la energía cinética del brazo 1:

$$K_1 = \text{Energía cinética rotacional} = K_1 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad \text{donde } \dot{\theta} = \dot{q}_1$$

En momento de inercia I esta dado respecto del centro de rotación, por lo tanto, aplicando el Teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos, que sirve para realizar una evaluación precisa sobre el momento de inercia (capacidad de rotación del objeto alrededor de un eje) de un cuerpo extendido que circunda un eje paralelo (Llopis y Gaspe, 2017)

Se tiene que:

$$I = I_1 + m_1 l c_1^2 \rightarrow K_1 = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 l c_1^2) \dot{q}_1^2$$

Para calcular la energía cinética del brazo 2 se utilizó el Teorema de Koenig:

$$K_2 = \text{Energía cinética traslacional} + \text{Energía cinética rotacional} = K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_G^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

Así la energía cinética total del sistema es:

$$K = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 l c_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l c_2^2 + I_2 + 2m_2 l_1 l c_2 \cos(q_2)) \dot{q}_1^2 + (m_2 l c_2^2 + I_2 + m_2 l_1 l c_2 \cos(q_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (I_2 + m_2 l c_2^2) \dot{q}_2^2$$

Así la energía potencial total del sistema fue:

$$V = V_1 + V_2 = m_1 g l c_1 \cos(q_1) + m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l c_2 \cos(q_1 + q_2)]$$

$$V = (m_1 l c_1 + m_2 l_1) g \cos(q_1) + m_2 l c_2 g \cos(q_1 + q_2)$$

En ambos casos, el éxito de la aplicación de este método estuvo en la posibilidad de resolver el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, cuyas soluciones proveen las funciones de Lyapunov que representan las funciones de energía asignables al sistema en lazo cerrado.

Para ello, fue necesario aplicar un proceso de reducción que permitió obtener una familia genérica de matrices de inercia para las cuales fue posible encontrar una solución constructiva de la función de moldeado de la energía cinética. Y luego se realizaron las simulaciones numéricas pertinentes que confirmaron estas apreciaciones.

Metodología

Tipo de Investigación

mecánicos subactuados

Este estudio constituyó una revisión documental, de estudios en términos de la temática que se aborda, del tipo aplicada, que inicialmente recogió los trabajos y avances bibliográficos sobre el tema estudiado planteándose el objetivo general de Resolver el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, cuyas soluciones proveen funciones de Lyapunov que representan las funciones de energía asignables a sistemas mecánicos subactuados de grado 1.

Este tipo de investigación se caracteriza porque busca la aplicación o utilización de los conocimientos que se adquieren, asimismo conocer para hacer, para actuar, para construir y para modificar, para (Lozada, 2014) “se basa fundamentalmente en los hallazgos tecnológicos de la investigación básica, ocupándose del proceso de enlace entre la teoría y el producto” (p. 47).

Procesamiento de la información

Primeramente, se utilizó el Software Máxima, que sirvió de apoyo para los cálculos simbólicos en la resolución de la complejidad de las EDP. Asimismo, se utilizó el Software Octave, el cual permitió optar por herramientas de visualización y trazado 2D y 3D asociados a los resultados que se generaron en los dos casos de estudio de sistemas mecánicos subactuados de grado 1. Ambos softwares de licencia libre (GPL), lo cual permitió corroborar el comportamiento esperado de las funciones de Lyapunov encontradas.

En el Software Octave fue necesario diseñar dos códigos archivos de corrida o simulación para cada caso de sistema mecánico subactuado de grado 1. Denominados VDESTORA Y SIMVDESTORA para el Sistema TORA y VDESACRO y SIMVDESACRO para el Sistema ACROBOT que, en ambos casos, permitieron verificar si la función de energía potencial deseada (V_d) hallada en la resolución de la EDP cumplía con ser una función de Lyapunov.

Asimismo, se utilizó el Software Microsoft Office Word 2019, para insertar las ecuaciones en el manuscrito y realizar los cálculos pertinentes. El uso de estas herramientas permitió obtener la información numérica y gráfica, sobre la función correcta de H_d , J_d , R_d y la ley de control para el ajuste lazo abierto-lazo cerrado, que permitieron que el sistema en lazo cerrado tenga el mismo comportamiento de la dinámica objetivo.

Resultados

Sistema TORA

Siendo la matriz de inercia $M(q)$:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & rm_2 \cos(q_2) \\ rm_2 \cos(q_2) & m_2 r^2 + I \end{bmatrix} \rightarrow M(q) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \cos(q_2) \\ c_2 \cos(q_2) & c_3 \end{bmatrix}$$

y $c_1 = m_1 + m_2$, $c_2 = rm_2$, $c_3 = m_2 r^2 + I$. $M(q)$ es simétrica y definida positiva, por lo tanto: $d_{11} > 0 \rightarrow m_1 + m_2 > 0 \rightarrow c_1 > 0$ y $\det M(q) > 0 \rightarrow c_1 c_3 - c_2^2 \cos^2(q_2) > 0 \rightarrow c_1 c_3 - c_2^2 > 0$

Para obtener la representación Hamiltoniana del Sistema TORA, se define la función de Hamilton a partir de la transformada de Legendre de la función de Lagrange:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

Asumiendo que el sistema no posee amortiguamiento natural, las ecuaciones del movimiento pueden escribirse:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u \quad (1)$$

De la primera fila de (1):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \nabla_p H = M^{-1} p \\ M^{-1} &= \frac{1}{c_1 c_3 - c_2^2 \cos^2(q_2)} \begin{bmatrix} c_3 & -c_2 \cos(q_2) \\ -c_2 \cos(q_2) & c_1 \end{bmatrix} \\ \delta_1 &= c_1 c_3 - c_2^2 \cos^2(q_2) \\ M^{-1} &= \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} c_3 & -c_2 \cos(q_2) \\ -c_2 \cos(q_2) & c_1 \end{bmatrix} \\ \dot{q} &= \nabla_p H = M^{-1} p \end{aligned}$$

resultando dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} c_3 & -c_2 \cos(q_2) \\ -c_2 \cos(q_2) & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{\delta_1} [c_3 p_1 - c_2 p_2 \cos(q_2)] \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{\delta_1} [-c_2 p_1 \cos(q_2) + c_1 p_2] \end{aligned}$$

mecánicos subactuados

De la segunda fila de la ecuación (1) se tiene que:

$$\dot{p} = -\nabla_q H + Gu$$

$$\dot{p} = -\nabla_q H + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} + u$$

sabiendo que:

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} c_3 & -c_2 \cos(q_2) \\ -c_2 \cos(q_2) & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} k q_1^2 + m_2 g r [1 - \cos(q_2)]$$

$$H = \frac{1}{2\delta_1} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 p_1 - c_2 p_2 \cos(q_2) \\ -c_2 p_1 \cos(q_2) + c_1 p_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} k q_1^2 + m_2 g r [1 - \cos(q_2)]$$

$$H = \frac{1}{2(c_1 c_3 - c_2^2 \cos^2(q_2))} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) - c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] + \frac{1}{2} k q_1^2 + m_2 g r [1 - \cos(q_2)]$$

$$H = \frac{1}{2(c_1 c_3 - c_2^2 \cos^2(q_2))} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] + \frac{1}{2} k q_1^2 + m_2 g r [1 - \cos(q_2)]$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = k q_1^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{[(2c_2 p_1 p_2 \sin(q_2))(c_1 c_3 - c_2^2 \cos^2(q_2)) - (c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2)(-2c_2^2 \cos(q_2))(-\sin(q_2))]}{(c_1 c_3 - c_2^2 \cos^2(q_2))^2}$$

$$+ c_2 g \sin(q_2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{(c_2^2 \cos(q_2))(\sin(q_2))}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] + \frac{c_2 p_1 p_2 \sin(q_2)}{\delta_1}$$

$$+ c_2 g \sin(q_2)$$

Resultando las ecuaciones \dot{p}_1 y \dot{p}_2 :

$$\dot{p}_1 = -k q_1^2$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} + u$$

mecánicos subactuados

$$\dot{p}_2 = -\frac{(c_2^2 \cos(q_2))(\sin(q_2))}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] - \frac{c_2 p_1 p_2 \sin(q_2)}{\delta_1} - c_2 g \sin(q_2) + u$$

Finalmente se tiene el modelo matemático del Sistema Tora en lazo abierto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = \frac{1}{\delta_1} [c_3 p_1 - c_2 p_2 \cos(q_2)] \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{\delta_1} [-c_2 p_1 \cos(q_2) + c_1 p_2] \\ \dot{p}_1 = -k q_1^2 \\ \dot{p}_2 = -\frac{(c_2^2 \cos(q_2))(\sin(q_2))}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] - \frac{c_2 p_1 p_2 \sin(q_2)}{\delta_1} - c_2 g \sin(q_2) + u \end{array} \right.$$

Construcción de la Función de Lyapunov asociada al Sistema TORA**Realización Hamiltoniana**

Si se asume que el sistema no posee amortiguamiento natural, las ecuaciones del movimiento pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u$$

donde I_n es la matriz identidad $n \times n$, $\nabla_q H$, $\nabla_p H$ son los vectores columna gradiente de H respecto de q y respecto de p , y $u \in \mathfrak{R}^m$ es la función de control. La matriz $G \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ es determinada por la manera como el control $u \in \mathfrak{R}^m$ ingresa en el sistema, y es invertible en el caso que el sistema sea completamente actuado, o sea, $m = n$. En esta investigación se considera el caso más difícil en que el sistema es subactuado, es decir menos controles que grados de libertad, y asumimos que $\text{rango}(G) = m$

Para el sistema TORA $n = 2$ y $m = 1 \rightarrow m < n \rightarrow$ Sistema subactuado de grado 1

La energía total del sistema viene dada por:

$$H = \text{Energía Cinética} + \text{Energía Potencial}$$

$$H = \frac{1}{2} P^T M^{-1} P + V(q)$$

mecánicos subactuados

donde $q \in \mathfrak{R}^n$, $p \in \mathfrak{R}^n$ representan la posición generalizada y el momento generalizado, $M(q) = M^T(q) > 0$ es la matriz de inercia del sistema, y $V(q)$ es la energía potencial.

Para el sistema TORA la matriz M es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 * \cos(q_2) \\ c_2 * \cos(q_2) & c_3 \end{bmatrix}$$

Y la energía potencial es la siguiente:

$$V(q) = \frac{1}{2} K q_1^2 + m_2 g L (1 - \cos(q_2))$$

Se busca con el enfoque basado en energía hacer coincidir el comportamiento del sistema en lazo abierto con la dinámica objetivo.

La dinámica objetivo según el método viene dada por:

$$\dot{x} = (J_d - R_d) \nabla H_d$$

donde:

J_d : Matriz de interconexión

R_d : Matriz de amortiguamiento

M_d : Matriz de inercia deseada

Cuyas estructuras son las siguientes:

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} * M_d \\ -M_d M^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad R_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G * K_v * G^T \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M_d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

Moldeado de la Energía

Al igualar el sistema en lazo abierto y la dinámica objetivo resulta lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} * M_d \\ -M_d * M^{-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G * K_v * G^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones en derivadas parciales pueden de manera natural ser separadas en términos que dependen de p y términos que son independientes de p , o sea, aquéllos que corresponden a la energía cinética, y aquéllos que corresponden a la energía potencial, respectivamente.

La primera fila de \dot{p} es \dot{p}_1 :

$$\dot{p}_1 = -\nabla_{q_1} H = -\frac{1}{\delta_1} [(a_1 c_3 - a_2 c_2 \cos(q_2)) \nabla_{q_1} V_d + (-a_1 c_2 \cos(q_2) + a_2 c_1) \nabla_{q_2} V_d]$$

mecánicos subactuados

$\nabla_{q_1} H = Kq_1$ para conseguir la EDP para encontrar V_d .

$$-Kq_1 = -\frac{1}{\delta_1} [(a_1 c_3 - a_2 c_2 \cos(q_2)) \nabla_{q_1} V_d + (-a_1 c_2 \cos(q_2) + a_2 c_1) \nabla_{q_2} V_d]$$

La ecuación anterior puede intentar resolverse usando el programa Máxima para cálculo simbólico, pero se obtiene una solución extremadamente complicada válida para cualquier conjunto de valores de los parámetros a_1 , a_2 , y a_3 . Para resolver esta dificultad, se recurre a un subconjunto de valores posibles para estos parámetros que reducen la complejidad de la ecuación.

Se denota:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{a_1 c_3 - a_2 c_2 \cos(q_2)}{a_2 c_1 - a_1 c_2 \cos(q_2)} = \frac{b_3 + b_4 \cos(q_2)}{b_1 + b_2 \cos(q_2)}$$

Finalmente se consigue la EDP para hallar la V_d :

$$\frac{\alpha}{q_1} \nabla_{q_1} V_d + \frac{1}{q_1} \nabla_{q_2} V_d = \frac{K}{a_1} [\sqrt{c_1 c_3} + c_2 \cos(q_2)]$$

La aplicación del método de las características conduce a la solución de la EDP siguiente:

$$V_d = \frac{1}{2} R_d (q_1 - \alpha q_2)^2 + \frac{K}{a_1} \left(\frac{\alpha q_2^2}{2} \sqrt{c_1 c_3} + \sqrt{c_1 c_3} (q_1 - \alpha q_2) q_2 + \alpha c_2 \cos(q_2) + \alpha c_2 q_2 \sin(q_2) - \alpha c_2 + c_2 (q_1 - \alpha q_2) \sin(q_2) \right)$$

Se sabe por el Principio de Lagrange que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Los} \\ \text{puntos} \\ \text{de} \\ \text{equilibrio} \\ \text{del} \\ \text{Sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Los} \\ \text{puntos} \\ \text{críticos} \\ \text{de } V_d \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Los} \\ \text{puntos} \\ \text{de} \\ \text{equilibrio} \\ \text{estable} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Los} \\ \text{puntos} \\ \text{mínimos} \\ \text{de } V_d \end{array} \right\}$$

Resultando ser $q_1 = 0$ y $q_2 = 0 \rightarrow$ Puntos críticos de V_d y por lo tanto puntos de equilibrio del sistema TORA.

Para verificar si el punto (0,0) es un punto mínimo se procede a calcular el Hessiano:

$$Hess(v_d) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)}$$

Por lo tanto, si se cumple que:

$R_d < 2 \frac{(K\sqrt{c_1 c_3} + Kc_2)}{a_1 \alpha} \rightarrow$ el Hess ($v_d(0,0)$) es definido positivo $\rightarrow (0,0)$ es un mínimo y es un punto de equilibrio estable (Ver Figura 3).

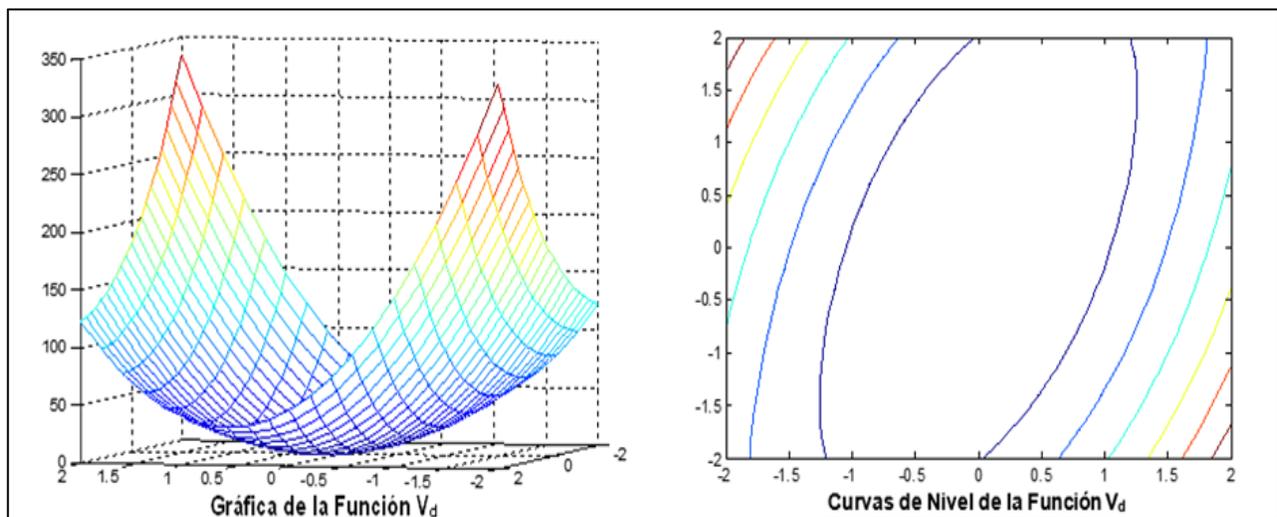


Figura 3. Simulación de la función V_d del Sistema TORA

Fuente: Autores (2023) a partir del Software OCTAVE

En este sentido, al ejecutar los códigos de archivos de corrida o simulación VDESTORA Y SIMVDESTORA, a través del Software OCTAVE, se obtuvo que los resultados para la función V_d del sistema TORA demuestran que existe un mínimo y la función es convexa, y por tanto se comprueba que la V_d hallada al resolver la EDP es la función Lyapunov que se necesita para calcular la función de control que permita estabilizar el sistema TORA.

Sistema ACROBOT

Por otro lado, retomando la energía cinética total del Sistema ACROBOT es:

$$K = \frac{1}{2}(I_1 + m_1lc_1^2 + m_2l_1^2 + m_2lc_2^2 + I_2 + 2m_2l_1lc_2 \cos(q_2))\dot{q}_1^2 + (m_2lc_2^2 + I_2 + m_2l_1lc_2 \cos(q_2))\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(I_2 + m_2lc_2^2)\dot{q}_2^2$$

Así la energía potencial total del sistema es:

$$V = V_1 + V_2 = m_1glc_1 \cos(q_1) + m_2g[l_1 \cos(q_1) + lc_2 \cos(q_1 + q_2)]$$

$$V = (m_1lc_1 + m_2l_1)g \cos(q_1) + m_2lc_2g \cos(q_1 + q_2)$$

Se determina el Langrangiano del sistema:

$$L = K(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t)$$

$$L = \frac{1}{2}(I_1 + m_1lc_1^2 + m_2l_1^2 + m_2lc_2^2 + I_2 + 2m_2l_1lc_2 \cos(q_2))\dot{q}_1^2 + (m_2lc_2^2 + I_2 + m_2l_1lc_2 \cos(q_2))\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(I_2 + m_2lc_2^2)\dot{q}_2^2 - (m_1lc_1 + m_2l_1)g \cos(q_1) - m_2lc_2g \cos(q_1 + q_2)$$

En el caso de sólidos rígidos y en ausencia de fricción se escribe:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B(q, \dot{q})\tau$$

Del cual resulta para el Sistema ACROBOT:

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) & c_2 + c_3 \cos(q_2) \\ c_2 + c_3 \cos(q_2) & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_3 \sin(q_2) & -c_3 \sin(q_2)\dot{q}_2 - c_3 \sin(q_2)\dot{q}_1 \\ c_3 \sin(q_2)\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_4 g \cos(q_1) + c_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ c_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau$$

Donde la matriz de inercia $M(q)$ para ambos sistemas es:

$$M(q) = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) & c_2 + c_3 \cos(q_2) \\ c_2 + c_3 \cos(q_2) & c_2 \end{bmatrix}$$

$M(q)$ es simétrica y definida positiva, por lo tanto: $d_{11} > 0 \rightarrow c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) > 0$

$$\rightarrow m_1lc_1^2 + m_2l_1^2 + I_1 + m_2lc_2^2 + I_2 + 2m_2l_1lc_2 \cos(q_2) > 0$$

$$\rightarrow m_1lc_1^2 + m_2l_1^2 + I_1 + m_2lc_2^2 + I_2 - 2m_2l_1lc_2 > 0$$

$$\rightarrow m_1lc_1^2 + I_1 + I_2 + m_2(l_1^2 - lc_2^2) > 0$$

Para obtener la representación Hamiltoniana de ambos sistemas, se define la función de Hamilton a partir de la transformada de Legendre de la función de Lagrange:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

Asumiendo que el sistema no posee amortiguamiento natural, las ecuaciones del movimiento pueden escribirse:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u \quad (2)$$

De la primera fila de (2)

$$\dot{q} = \nabla_p H = M^{-1}p$$

$$M^{-1} = \frac{1}{c_1 c_2 - c_3^2 \cos^2(q_2)} \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 - c_3 \cos(q_2) \\ -c_2 - c_3 \cos(q_2) & c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) \end{bmatrix}$$

$$\delta_1 = c_1 c_2 - c_3^2 \cos^2(q_2)$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 - c_3 \cos(q_2) \\ -c_2 - c_3 \cos(q_2) & c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) \end{bmatrix}$$

$$\dot{q} = \nabla_p H = M^{-1}p$$

resultando dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 - c_3 \cos(q_2) \\ -c_2 - c_3 \cos(q_2) & c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{\delta_1} [c_2 p_1 + (-c_2 - c_3 \cos(q_2)) p_2]$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{\delta_1} [(-c_2 - c_3 \cos(q_2)) p_1 + (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) p_2]$$

De la segunda fila de la ecuación (2) se tiene que:

$$\dot{p} = -\nabla_q H + Gu$$

Para el sistema Acrobot, la matriz de inercia $M(q)$ depende de la coordenada actuada, resultando:

$$\dot{p} = -\nabla_q H + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} + u$$

mecánicos subactuados

En tal sentido y sabiendo que:

$$H = \frac{1}{2} [p_1 \quad p_2] \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 - c_3 \cos(q_2) \\ -c_2 - c_3 \cos(q_2) & c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + c_4 g \cos(q_1) + c_5 g \cos(q_1 + q_2)$$

$$H = \frac{1}{2\delta_1} [p_1 \quad p_2] \begin{bmatrix} c_2 p_1 + (-c_2 - c_3 \cos(q_2)) p_2 \\ (-c_2 - c_3 \cos(q_2)) p_1 + (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) p_2 \end{bmatrix} + c_4 g \cos(q_1) + c_5 g \cos(q_1 + q_2)$$

$$H = \frac{1}{2(c_1 c_2 - c_3^2 \cos^2(q_2))} [c_2 p_1^2 + (-c_2 - c_3 \cos(q_2)) p_1 p_2 + (-c_2 - c_3 \cos(q_2)) p_1 p_2 + (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) p_2^2] + c_4 g \cos(q_1) + c_5 g \cos(q_1 + q_2)$$

$$H = \frac{1}{2(c_1 c_2 - c_3^2 \cos^2(q_2))} [c_2 p_1^2 + 2(-c_2 - c_3 \cos(q_2)) p_1 p_2 + (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) p_2^2] + c_4 g \cos(q_1) + c_5 g \cos(q_1 + q_2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = -(m_1 l c_1 + m_2 l_1) g \sin(q_1) - m_2 l c_2 g \sin(q_1 + q_2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_2} = -4 \left[\frac{(c_2 p_1^2 + (2(-c_2 - c_3 \cos(q_2))) p_1 p_2 + (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) p_2^2) c_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2)}{(2c_1 c_2 - 2c_3^2 \cos^2(q_2))^2} \right] + \dots$$

$$\dots - \left[\frac{-2c_3 p_1 p_2 \sin(q_2) - 2c_3 p_2^2 \sin(q_2)}{(2c_1 c_2 - 2c_3^2 \cos^2(q_2))} \right] - g c_5 \sin(q_1 + q_2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

$$= - \left[\frac{(c_2 p_1^2 + (2(-c_2 - c_3 \cos(q_2))) p_1 p_2 + (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) p_2^2) c_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2)}{\delta_1^2} \right] + \dots$$

$$\dots - \left[\frac{-(c_3 p_1 p_2 \sin(q_2) - c_3 p_2^2 \sin(q_2))}{\delta_1} \right] - g c_5 \sin(q_1 + q_2)$$

Se obtiene las ecuaciones \dot{p}_1 y \dot{p}_2 para el sistema Acrobot:

$$\dot{p}_1 = c_4 g \sin(q_1) + c_5 g \sin(q_1 + q_2)$$

$$\dot{p}_2$$

$$= \left[\frac{(c_2 p_1^2 + (2(-c_2 - c_3 \cos(q_2))) p_1 p_2 + (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) p_2^2) c_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2)}{\delta_1^2} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{-(c_3 p_1 p_2 \sin(q_2) - c_3 p_2^2 \sin(q_2))}{\delta_1} \right] + g c_5 \sin(q_1 + q_2) + u_{\text{control}}$$

Finalmente se tiene el modelo matemático del Sistema ACROBOT en lazo abierto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = \frac{1}{\delta_1} [c_2 p_1 + (-c_2 - c_3 \cos(q_2)) p_2] \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{\delta_1} [(-c_2 - c_3 \cos(q_2)) p_1 + (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) p_2] \\ \dot{p}_1 = c_4 g \sin(q_1) + c_5 g \sin(q_1 + q_2) \\ \dot{p}_2 = \left[\frac{(c_2 p_1^2 + (2(-c_2 - c_3 \cos(q_2))) p_1 p_2 + (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) p_2^2) c_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2)}{\delta_1^2} \right] \\ + \left[\frac{-(c_3 p_1 p_2 \sin(q_2) - c_3 p_2^2 \sin(q_2))}{\delta_1} \right] + g c_5 \sin(q_1 + q_2) + u \end{array} \right.$$

Construcción de la Función de Lyapunov asociada al Sistema ACROBOT

Realización Hamiltoniana

Para el sistema ACROBOT la matriz M es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) & c_2 + c_3 \cos(q_2) \\ c_2 + c_3 \cos(q_2) & c_2 \end{bmatrix}$$

Y la energía potencial es la siguiente:

$$V(q) = g[c_4 \cos(q_1) + c_5 \cos(q_1 + q_2)]$$

Se busca con control basado en energía hacer coincidir el comportamiento del sistema en lazo abierto con la dinámica objetivo. La dinámica objetivo según este método viene dada por:

$$\dot{x} = (J_d - R_d) \nabla H_d$$

donde:

J_d : Matriz de interconexión

R_d : Matriz de amortiguamiento

M_d : Matriz de inercia deseada

Cuyas estructuras son las siguientes:

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} * M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2 \end{bmatrix}, \quad R_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G * K_v * G^T \end{bmatrix} \quad y \quad M_d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

Moldeado de la Energía

Al igualar el sistema en lazo abierto y la dinámica objetivo resulta lo siguiente:

mecánicos subactuados

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} * M_d \\ -M_d * M^{-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G * K v * G^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones en derivadas parciales pueden de manera natural ser separadas en términos que dependen de p y términos que son independientes de p , o sea, aquéllos que corresponden a la energía cinética, y aquéllos que corresponden a la energía potencial, respectivamente.

De esta forma la segunda fila de la ecuación queda:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\nabla_q H + G * u_{es} = -M_d * M^{-1} * \nabla_q H_d \\ \dot{p} &= \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H \\ \nabla_{q_2} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u \\ &= - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} * \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 + c_3 \cos(q_2) \\ -c_2 + c_3 \cos(q_2) & c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H_d \\ \nabla_{q_2} H_d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Además, como la matriz M_d es constante $\rightarrow \nabla_{q_1} H_d = \nabla_{q_1} V_d$ y $\nabla_{q_2} H_d = \nabla_{q_2} V_d$

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H \\ \nabla_{q_2} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u = -\frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} a_1 c_3 - a_2 c_2 \cos(q_2) & -a_1 c_2 \cos(q_2) + a_2 c_1 \\ a_2 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2) & -a_2 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} V_d \\ \nabla_{q_2} V_d \end{bmatrix}$$

$\dot{p} =$

$$-\frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} a_1 c_2 - a_2 (c_2 + c_3 \cos(q_2)) & -a_1 (c_2 + c_3 \cos(q_2)) + a_2 (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) \\ a_2 c_2 - a_3 (c_2 + c_3 \cos(q_2)) & -a_2 (c_2 + c_3 \cos(q_2)) + a_3 (c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} V_d \\ \nabla_{q_2} V_d \end{bmatrix}$$

La primera fila de \dot{p} es \dot{p}_1 :

$$\dot{p}_1 = -\nabla_{q_1} H$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{1}{\delta_1} [(a_1 c_2 - a_2 (c_2 + c_3 \cos(q_2))) \nabla_{q_1} V_d + (-a_1 (c_2 + c_3 \cos(q_2)) + a_2 (c_1 + c_2 + \\ & 2c_3 \cos(q_2))) \nabla_{q_2} V_d] \quad (118) \end{aligned}$$

$\nabla_{q_1} H = g[-c_4 \text{sen}(q_2) - c_5 \text{sen}(q_1 + q_2)]$ se sustituye para conseguir la EDP para encontrar V_d .

$$\nabla_{q_1} V_d + \left[\frac{a_2 (c_1 + c_2) - a_1 c_2 + c_3 (2a_2 - a_1) \cos(q_2)}{(a_1 - a_2) c_2 - a_2 c_3 \cos(q_2)} \right] \nabla_{q_2} V_d = \left[\frac{(-c_4 \text{sen}(q_1) - c_5 \text{sen}(q_1 + q_2))}{(a_1 - a_2) c_2 - a_2 c_3 \cos(q_2)} \right] g \delta_1$$

La ecuación anterior se resolvió, utilizando el comando *pdsolve* del Software Máxima, aun cuando se obtuvo una solución extremadamente complicada válida para cualquier conjunto de valores de los parámetros a_1 , a_2 , y a_3 . Para resolver esta dificultad, se recurrió a un subconjunto de valores posibles para estos parámetros que reducen la complejidad de la ecuación.

Se denota:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{a_2(c_1+c_2)-a_1c_2+c_3(2a_2-a_1)\cos(q_2)}{(a_1-a_2)c_2-a_2c_3\cos(q_2)} = \frac{b_3+b_4\cos(q_2)}{b_1+b_2\cos(q_2)}$$

Donde:

$$b_1 = (a_1 - a_2) c_2, \quad b_2 = -a_2 c_3, \quad b_3 = a_2(c_1 + c_2) - a_1 c_2, \quad \text{y} \quad b_4 = c_3(2a_2 - a_1).$$

resulta la EDP para hallar la V_d :

$$V_d(q_1, q_2) = \frac{g}{a_2} \{A \cos(q_1) + B \cos(q_1 + q_2) + C \cos(q_1 - q_2) + D \cos(q_1 + 2q_2) + E\} + \frac{1}{2} R_p (q_2 + \alpha q_1)^2$$

$$\nabla q_1 V_d - \alpha \nabla q_2 V_d = \frac{g(\sqrt{c_1 c_2} - c_3 \cos(q_2))}{a_2} [(c_4 \sin(q_1) + c_5 \sin(q_1 + q_2))]$$

La aplicación del método de las características conduce a la solución de la EDP siguiente:

$$V_d(q_1, q_2) = \frac{g}{a_2} \{A \cos(q_1) + B \cos(q_1 + q_2) + C \cos(q_1 - q_2) + D \cos(q_1 + 2q_2) + E\} + \frac{1}{2} R_p (q_2 + \alpha q_1)^2$$

coeficientes A, B, C y D vienen dados por

$$A = \frac{c_3 c_4}{2} - \sqrt{c_1 c_2} c_4, \quad B = \frac{c_5 \sqrt{c_1 c_2}}{\alpha - 1} - \frac{1}{2} \frac{c_3 c_4}{(\alpha - 1)}, \quad C = \frac{1}{2} \frac{c_3 c_4}{(\alpha + 1)}, \quad D = -\frac{1}{2} \frac{c_3 c_5}{(2\alpha - 1)}$$

Se sabe por el Principio de Lagrange que:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Los puntos} \\ \text{de} \\ \text{equilibrio} \\ \text{del} \\ \text{Sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Los puntos} \\ \text{críticos de} \\ V_d \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Los} \\ \text{puntos de} \\ \text{equilibrio} \\ \text{estable} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{Los} \\ \text{puntos} \\ \text{mínimos} \\ \text{de } V_d \end{array} \right\}$$

Resultando ser $q_1 = 0$ y $q_2 = 0 \rightarrow$ Puntos críticos de V_d y por lo tanto puntos de equilibrio del sistema ACROBOT.

Para verificar si el punto $(0,0)$ es un punto mínimo se procede a calcular el Hessiano:

$$Hess(v_d) = \begin{bmatrix} R_d \alpha^2 + \frac{g}{a_2} [-A - B - C - D] & R_d \alpha + \frac{g}{a_2} [-B + C - 2D] \\ R_d \alpha + \frac{g}{a_2} [-B + C - 2D] & R_d + \frac{g}{a_2} [-B - C - 4D] \end{bmatrix}$$

Para que exista un mínimo en la función V_d los menores deben ser positivos:

$$\text{Determinante 1: } R_d > \frac{g}{a_2 \alpha^2} (A + B + C + D)$$

$$\text{Determinante 2: } R_d > \frac{g}{a_2} \left[\frac{AB+AC+4AD+9CD+4BC+BD}{A+B+C+D+\alpha^2(B+C+4D-2\alpha(B-C+4D))} \right]$$

Se deduce que $q_1 = 0$ y $q_2 = 0$ es punto crítico aislado para el sistema ACROBOT

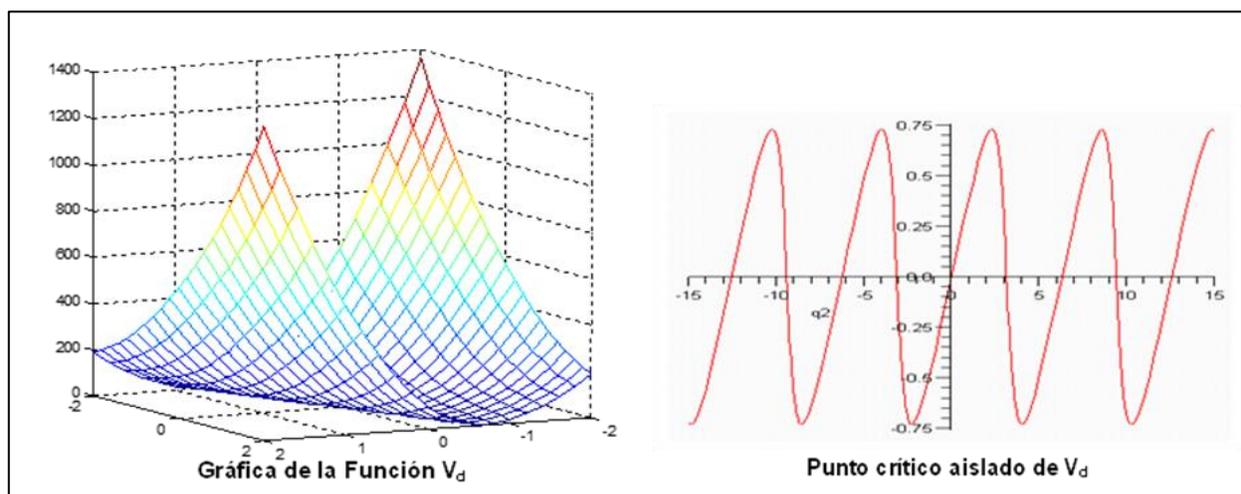


Figura 4. Simulación de la función V_d del Sistema ACROBOT

Fuente: Autores (2023) a partir del Software OCTAVE

En la figura 4 se presentan las simulaciones de los resultados obtenidos utilizando los códigos de archivos de corrida o simulaciones VDESACRO Y SIMVDESACRO, mediante el Software OCTAVE, los cuales fueron diseñados para comprobar que la V_d hallada al resolver la EDP es la función Lyapunov que se necesita para calcular la función de control. Al ejecutar dichos programas se obtuvo que existe un mínimo y la función es convexa para la función V_d del Sistema ACROBOT.

Conclusiones

Se presentó un método de obtención de funciones de Lyapunov mediante el moldeado de la energía total de los sistemas estudiados, tomando ventaja de la posibilidad de obtener una matriz deseada con

términos constantes, y para la síntesis de la energía potencial deseada se obtuvo una reducción del conjunto de parámetros posibles para la matriz deseada, que facilitó la resolución de la ecuación en derivadas parciales característica de métodos de control basados en energía.

Tanto para el Sistema TORA, como el Sistema ACROBOT, ambos sistemas mecánicos subactuados de grado 1, se comprobó que la V_d hallada al resolver la EDP es la función Lyapunov que se requería, pues se evidenció la existencia de un mínimo, así como la función es convexa para V_d de ambos sistemas.

Esto se demostró con las respectivas simulaciones realizadas en el Software OCTAVE, mediante los códigos de archivos de corrida diseñados para tal fin. Por tanto, se logró resolver el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, cuyas soluciones proveen funciones de Lyapunov en sistemas mecánicos subactuados de grado 1.

Referencias

1. Fernández, D. (2021). Curso de Mecánica Física. España: Universidad Francisco de Vitoria (UFV Madrid). <https://acortar.link/afpXz0>
2. Llopis, J., y Gaspe, M. (2017). Cálculo de momentos de inercia mediante el teorema de Steiner. Aplicación a la superficie de un triángulo rectángulo. España: Universitat Politècnica de València. <https://acortar.link/aGaDRH>
3. López, F. (2014). Construcción de funciones de Lyapunov para sistemas homogéneos de segundo orden (Método por reducción de variables). D.F. México: Universidad Nacional Autónoma de México. <https://acortar.link/AyfcG7>
4. Lozada, J. (2014). Investigación aplicada. Definición, Propiedad Intelectual e Industria. Dialnet, 47-50. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6163749>
5. Newcastle. (8 de Diciembre de 2022). Obtenido de El Teorema de Estabilidad de Lyapunov: <https://acortar.link/DoiOHe>
6. Pérez, M., y Morillo, A. (2016). Simulaciones numéricas para la estabilización de sistemas mecánicos subactuados de grado uno, usando IDA-PBC: el caso del sistema TORA. Serbiluz, 17(1), 18-45.

7. Scola, I., García, L., y Hespanha, J. (2022). Limbic System-Inspired Performance-Guaranteed Control for Nonlinear Multi-Agent Systems With Uncertainties. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 1-12. <https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/187098>
8. Tedrake, R. (2022). *Underactuated Robotics. Algorithms for Walking, Running, Swimming, Flying, and Manipulation*. <http://underactuated.mit.edu/acrobot.html>

©2023 por los autores. Este artículo es de acceso abierto y distribuido según los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).